OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 1999
2ª FASE – 25 de Setembro de 1999
NÍVEL 1 – 5ª. e 6ª. Séries

Instruções:
1) ***A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.***
2) ***Todas as soluções devem ser justificadas.***
3) ***Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.***
4) ***A Prova tem a duração de 4 horas.***
5) ***Não é permitido o uso de calculadora.***

PROBLEMA 1:
Gustavo, Eduardo e Augusto disputam uma série de partidas de xadrez da seguinte maneira : dois deles jogam entre si e o vencedor joga com o que ficou de fora. Se o jogo terminar empatado, aquele que jogou com as peças brancas é considerado o perdedor. Ao final da série, Gustavo tinha jogado 15 partidas, Eduardo jogou 9 partidas e Augusto jogou 14 partidas. Quais foram os adversários na partida de número 13 ?

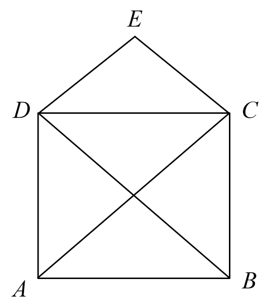
PROBLEMA 2:
Calcule o produto de todos os números naturais menores que 100 e que tenham exatamente três divisores. Mostre que este número é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 3:
José criou uma seqüência de inteiros positivos segundo três regras. Começando com um inteiro positivo, ele aplica ao resultado a regra apropriada, dentre as abaixo relacionadas, e continua sempre desta forma.

Regra 1 : Se o inteiro for menor do que 10, multiplica-o por 9.
Regra 2 : Se o inteiro for par e maior do que 9, divide-o por 2.
Regra 3 : Se o inteiro for ímpar e maior do que 9, dele subtrai 5.

Um exemplo de uma tal seqüência é 23, 18, 9, 81, 76, ...
Qual é o 1999º termo da seqüência que começa com 98, 49, ...?

PROBLEMA 4:
A Figura a seguir é formada pelos 5 pontos A, B, C, D, E, e pelos 8 segmentos AB, AC, AD, BC, BD, CD, CE, DE.



a) Mostre que existe uma maneira de desenhar esta Figura, partindo de um dos 5 pontos, sem tirar o lápis do papel e sem percorrer mais de uma vez nenhum segmento.

b) Explique por que, se acrescentarmos a exigência de que o desenho deva terminar no mesmo ponto em que começou, é impossível realizar tal desenho.

OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 1999
2ª FASE – 25 de Setembro de 1999
NÍVEL 2 – 7ª e 8ª Séries

Instruções:

1) ***A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.***
2) ***Todas as soluções devem ser justificadas.***
3) ***Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.***
4) ***A Prova tem a duração de 4 horas.***
5) ***Não é permitido o uso de calculadora.***

PROBLEMA 1:

Gustavo, Eduardo e Augusto disputam uma série de partidas de xadrez da seguinte maneira : dois deles jogam entre si e o vencedor joga com o que ficou de fora. Se o jogo terminar empatado, aquele que jogou com as peças brancas é considerado o perdedor. Ao final da série, Gustavo tinha jogado 15 partidas, Eduardo jogou 9 partidas e Augusto jogou 14 partidas. Quais foram os adversários na partida de número 13 ?

PROBLEMA 2:

Mister M pediu a uma pessoa da platéia: "Escreva num papel (sem que eu veja) o número de seu aniversário, como um número de 8 algarismos" (por exemplo, se o aniversário da pessoa fosse 23 de outubro de 1982, ela teria escrito o número 23101982). "Agora, misture os algarismos desse número em qualquer ordem formando um segundo número com 8 algarismos" (no exemplo acima, a pessoa poderia ter formado, por exemplo, o número 13208291; também é admitido ter zeros à esquerda, e ignorá-los). "Agora, subtraia o menor do maior; em seguida, do resultado, omita um algarismo (diferente de 0) a sua escolha, e diga-me, numa ordem qualquer, os outros que ficaram." Após seguir as instruções, o espectador ditou os algarismos que sobraram: 0; 0; 1; 1; 2; 5; 7. E então, Mister M adivinhou corretamente o algarismo que faltava. Qual foi o algarismo que Mister M adivinhou? E qual foi o truque?

PROBLEMA 3:

Existem em uma rua 17 casas numeradas, da primeira à ultima, com números naturais consecutivos. Um incêndio destruiu uma das casas e, com isto, a diferença entre a antiga média dos números das casas e a nova média foi de 0,25. Qual foi a casa queimada?

PROBLEMA 4:

Um trapézio $ABCD$ de bases BC e AD com $BC < AD$ é tal que $2 \cdot AB = CD$ e $\angle BAD + \angle CDA = 120^o$. Determine os ângulos do trapézio $ABCD$.

OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 1999
2ª FASE – 25 de Setembro de 1999
NÍVEL 3 – Ensino Médio

Instruções:

5) ***A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.***
6) ***Todas as soluções devem ser justificadas.***
7) ***Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.***
8) ***A Prova tem a duração de 4 horas.***
9) ***Não é permitido o uso de calculadora.***

PROBLEMA 1:

Mister M pediu a uma pessoa da platéia: "Escreva num papel (sem que eu veja) o número de seu aniversário, como um número de 8 algarismos" (por exemplo, se o aniversário da pessoa fosse 23 de outubro de 1982, ela teria escrito o número 23101982). "Agora, misture os algarismos desse número em qualquer ordem formando um segundo número com 8 algarismos" (no exemplo acima, a pessoa poderia ter formado, por exemplo, o número 13208291; também é admitido ter zeros à esquerda, e ignorá-los). "Agora, subtraia o menor do maior; em seguida, do resultado, omita um algarismo (diferente de 0) a sua escolha, e diga-me, numa ordem qualquer, os outros que ficaram." Após seguir as instruções, o espectador ditou os algarismos que sobraram: 0; 0; 1; 1; 2; 5; 7. E então, Mister M adivinhou corretamente o algarismo que faltava. Qual foi o algarismo que Mister M adivinhou? E qual foi o truque?

PROBLEMA 2:

Existem em uma rua 17 casas numeradas, da primeira à ultima, com números naturais consecutivos. Um incêndio destruiu uma das casas e, com isto, a diferença entre a antiga média dos números das casas e a nova média foi de 0,25. Qual foi a casa queimada?

PROBLEMA 3:

Em um triângulo ABC no qual o ângulo $\angle BAC$ é igual a 60°, escolhe-se um ponto do seu interior de modo que os ângulos $\angle APB$, $\angle BPC$ e $\angle CPA$ são iguais a 120°. Se $AP = a$, determine a área do triângulo BPC.

PROBLEMA 4:

A seqüência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... é obtida a partir dos dois primeiros termos, de modo que cada termo é a soma dos dois anteriores. O mesmo ocorre com a seqüência 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...
Mostre que:

a) nenhum termo da segunda seqüência é múltiplo de 5;
b) dado qualquer número inteiro positivo n, existe algum termo da primeira seqüência que é múltiplo de n.