OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2000
2ª FASE – 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 1 – 5ª e 6ª Séries

Instruções:
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A Prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
Dentro de uma caixa fechada, há uma bola branca e uma bola preta. Numa segunda caixa fechada, há duas bolas brancas, e numa terceira caixa fechada, há duas bolas pretas. Cada caixa possui uma etiqueta indicando o conteúdo da caixa, mas alguém misturou as três etiquetas de modo que todas as etiquetas estão erradas. Você seria capaz de escolher apenas uma das seis bolas de modo tal que, olhando sua cor, você possa dizer o conteúdo de cada uma das caixas?

PROBLEMA 2:
Três grandes amigos, cada um deles com algum dinheiro, redistribuem o que possuem da seguinte maneira : Antonio dá a Bernardo e a Carlos dinheiro suficiente para duplicar a quantia que cada um possui. A seguir, Bernardo dá a Antonio e a Carlos o suficiente para que cada um duplique a quantia que possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo, isto é, dá a Antonio e a Bernardo o suficiente para que cada um duplique a quantia que possui. Se Carlos possuía $R\$36,00$ tanto no início quanto no final da distribuição, qual a quantia total que os três amigos possuem juntos ?

PROBLEMA 3:
Antônio e Paulo disputam um jogo, com as seguintes regras. Dois números naturais são escritos no quadro. Antônio calcula a diferença entre o maior e o menor desses dois números, e escreve o resultado no quadro. Em seguida, Paulo escolhe dois números que que já estejam no quadro e escreve no quadro a diferença entre o maior e o menor, desde que o resultado não repita um número que já esteja no quadro. Em seguida, Paulo e Antônio continuam a agir assim, ora um, ora outro. O jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais número para escrever, e então este jogador é o perdedor. Por exemplo, se os números iniciais forem 5 e 3, Antônio escreve 2, em seguida Paulo só pode escrever 1, e Antônio só pode escrever 4. Paulo então perde, pois não tem mais o que escrever. Agora, os números 57 e 75 estão escritos inicialmente no quadro, e Antônio começa o jogo. Pode-se garantir que um dos dois vai perder? Pode-se prever o número de jogadas em que o jogo vai terminar?

PROBLEMA 4:
Mostre que os números inteiros de 1 a 16 podem ser dispostos em linha numa certa ordem, sem repetir nenhum, de modo que a soma de dois adjacentes (vizinhos) quaisquer seja um quadrado perfeito (isto é, o quadrado de um inteiro).

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2000
2ª FASE – 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 2 – 7ª e 8ª Séries

Instruções:
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A Prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
De quantas maneiras se pode escrever 2000 como a diferença de dois quadrados perfeitos (isto é, quadrados de números inteiros)?

PROBLEMA 2:
Antônio e Paulo disputam um jogo, com as seguintes regras. Dois números naturais são escritos no quadro. Antônio calcula a diferença entre o maior e o menor desses dois números, e escreve o resultado no quadro. Em seguida, Paulo escolhe dois números que que já estejam no quadro e escreve no quadro a diferença entre o maior e o menor, desde que o resultado não repita um número que já esteja no quadro. Em seguida, Paulo e Antônio continuam a agir assim, ora um, ora outro. O jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais número para escrever, e então este jogador é o perdedor. Por exemplo, se os números iniciais forem 5 e 3, Antônio escreve 2, em seguida Paulo só pode escrever 1, e Antônio só pode escrever 4. Paulo então perde, pois não tem mais o que escrever. Agora, os números 57 e 75 estão escritos inicialmente no quadro, e Antônio começa o jogo. Pode-se garantir que um dos dois vai perder? Pode-se prever o número de jogadas em que o jogo vai terminar?

PROBLEMA 3:
1) Mostre que os números inteiros de 1 a 16 podem ser dispostos em linha numa certa ordem, sem repetir nenhum, de modo que a soma de dois adjacentes (vizinhos) quaisquer seja um quadrado perfeito (isto é, o quadrado de um inteiro).
2) Mostre que este procedimento é impossível, se os números estiverem sobre uma circunferência.

PROBLEMA 4:
O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca-se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca-se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M.
Mostre que M é o ponto médio de PQ.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2000
2ª FASE – 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 3 – Ensino Médio

Instruções:
- A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A Prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
Forme uma sucessão de algarismos do seguinte modo: inicia-se com um número de dois algarismos, multiplicam-se esses dois algarismos, escreve-se à direita este resultado, e em seguida prossegue-se indefinidamente, sempre multiplicando os dois últimos algarismos obtidos. Por exemplo, começando com 67, obtém-se 6742816.... Se agora começarmos com 77, qual será o 2000º algarismo da sucessão?

PROBLEMA 2:
Duas pessoas jogam o seguinte jogo. Inicialmente, há duas pilhas de balas, uma com 21 e outra com 20 balas. O primeiro jogador escolhe uma das duas pilhas, come todas as balas desta pilha, e divide a outra pilha em duas (não necessariamente com o mesmo número de balas). Em seguida, o outro jogador segue o mesmo procedimento com as duas pilhas de balas que restam, e assim sucessivamente. O jogo acaba quando um jogador não consegue mais realizar este procedimento.

1) Existe uma estratégia vencedora para o jogador que começa?
2) Se em vez de 21 e 20, uma pilha contém inicialmente u balas e a outra, v balas, com $u > v > 1$, existe uma estratégia vencedora para o jogador que começa?

PROBLEMA 3:
Determine o único número inteiro **N** de nove algarismos que satisfaz às seguintes condições :
(1) seus algarismos são todos distintos e diferentes de zero.
(2) para todo inteiro positivo $n = 2, 3, 4, ..., 9$, o número formado pelos n primeiros algarismos de **N** (da esquerda para a direita) é divisível por n.

PROBLEMA 4:
O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca-se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca-se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M.
1) Mostre que M é o ponto médio de PQ.
2) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos APM e MCQ.