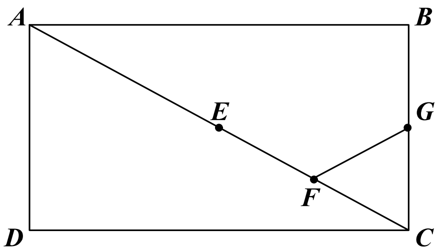
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2001
2ª FASE – 10 de Novembro de 2001
NÍVEL 1 – 5ª e 6ª Séries

Instruções:
- A prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora ou consulta a notas ou livros.

PROBLEMA 1:
O diretor de um colégio interno tem uma garrafa cheia de vinho trancada a chave no seu armário. Um aluno conseguiu uma cópia da chave, abriu o armário, bebeu metade do conteúdo da garrafa, completou a garrafa com água e recolocou-a no lugar. Deu a chave para um colega que fez a mesma coisa.
Quando o diretor percebeu, já havia menos de 1% de vinho na garrafa.
Quantos alunos, no mínimo, beberam da garrafa?

PROBLEMA 2:
ABCD é um retângulo de lados *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. *E* é o ponto médio da diagonal *AC*. *F* é o ponto médio do segmento *EC*. *G* é o ponto médio do lado *BC*. Determine a área do triângulo *CFG* como fração da área do retângulo *ABCD*.



PROBLEMA 3:
Achar o menor inteiro positivo que dividido por 29 deixa resto 5 e dividido por 31 deixa resto 28.

PROBLEMA 4:
Em 1981 o campeonato brasileiro de futebol tinha uma primeira fase onde os times eram divididos em grupos de 4, com todos jogando entre si, com turno e returno e inversão de mando de campo (se no turno o jogo A × B é no campo de A, no returno é no campo de B).

a) Mostre que não é possível organizar a tabela de modo que cada time jogue alternadamente em casa e fora.

b) Organize uma tabela com as seguintes condições: De um turno para o outro há inversão de mando de campo. Nenhuma equipe joga 3 jogos seguidos em casa ou 3 jogos seguidos fora. As equipes que começam em casa terminam fora, as equipes que começam fora terminam em casa. Nenhuma equipe joga os seus dois primeiros nem os seus dois últimos jogos em casa. Nenhuma equipe joga os seus dois primeiros jogos nem os seus dois últimos fora. Mostre que a menos de permutação, só há uma tabela que cumpre essas condições.

Obs. Entende-se por tabela um conjunto ordenado de rodadas. Cada rodada é um conjunto de jogos que envolve todas as equipes.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2001
2ª FASE – 10 de Novembro de 2001
NÍVEL 2 – 7ª e 8ª Séries

Instruções:
- A prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora ou consulta a notas ou livros.

PROBLEMA 1:
O diretor de um colégio interno tem uma garrafa cheia de vinho trancada a chave no seu armário. Um aluno conseguiu uma cópia da chave, abriu o armário, bebeu metade do conteúdo da garrafa, completou a garrafa com água e recolocou-a no lugar. Deu a chave para um colega que fez a mesma coisa.
Quando o diretor percebeu, já havia menos de 1% de vinho na garrafa.
Quantos alunos, no mínimo, beberam da garrafa?

PROBLEMA 2:
Tenho mais de 300 e menos de 400 limões. Quando os ponho em bolsas de 13 sobram 9, quando os ponho em bolsas de 15 sobram 4, quantos limões tenho?

PROBLEMA 3:
Em 1981 o campeonato brasileiro de futebol tinha uma primeira fase onde os times eram divididos em grupos de 4, com todos jogando entre si, com turno e returno e inversão de mando de campo (se no turno o jogo A × B é no campo de A, no returno é no campo de B).

b) Mostre que não é possível organizar a tabela de modo que cada time jogue alternadamente em casa e fora. Mostre que, se em cada grupo houver n times ($n > 4$, par), continua sendo impossível fazer a tabela com todos os times jogando alternadamente em casa e fora.

b) Organize uma tabela com as seguintes condições: De um turno para o outro há inversão de mando de campo. Nenhuma equipe joga 3 jogos seguidos em casa ou 3 jogos seguidos fora. As equipes que começam em casa terminam fora, as equipes que começam fora terminam em casa. Nenhuma equipe joga os seus dois primeiros nem os seus dois últimos jogos em casa. Nenhuma equipe joga os seus dois primeiros jogos nem os seus dois últimos fora. Mostre que a menos de permutação, só há uma tabela que cumpre essas condições.

Obs. Entende-se por tabela um conjunto ordenado de rodadas. Cada rodada é um conjunto de jogos que envolve todas as equipes.

PROBLEMA 4:
No interior de um retângulo $ABCD$ temos 2 círculos, um tangente aos lados AB e AD, outro tangente aos lados BC e CD. Ambos são também tangentes entre si. Mostre que a distância entre os centros só depende das medidas dos lados do retângulo.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2001
2ª FASE – 10 de Novembro de 2001
NÍVEL 3 – Ensino Médio

Instruções:
- A prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- A prova tem a duração de 4 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora ou consulta a notas ou livros.

PROBLEMA 1:
Seja I o ponto de encontro das bissetrizes internas de um triângulo ABC.
Seja r a reta perpendicular a AI passando em A. Seja s a reta perpendicular a CI passando em C. Seja P o ponto de interseção de r e s. Mostre que B P I são colineares.

PROBLEMA 2:
Em quantas partes um conjunto de n retas divide um plano? Supomos que quaisquer duas retas são concorrentes, e que os pontos de interseção são todos distintos.

PROBLEMA 3:
Considere o triângulo:

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
....

Ache o primeiro elemento da linha 2001, e determine quantos elementos tem essa linha.

PROBLEMA 4:
Quantos inteiros entre 1000 e 10000 não são divisíveis nem por 2 nem por 3 nem por 5?