OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2002
2ª FASE – 31 de agosto de 2002

NÍVEL 1 – 5ª e 6ª Séries do Ensino Fundamental

Instruções:

- ✓ A Prova é composta de 5 questões discursivas, todas de igual valor.
- ✓ Todas as soluções devem ser justificadas.
- ✓ Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- ✓ A Prova tem a duração de 4 horas.
- ✓ Não é permitido o uso de calculadora.
- ✓ Você deve ter recebido uma folha de papel almaço pautado, estas folhas de instruções e questões, e folhas sem pauta. Na folha de papel almaço escreva apenas seu nome, endereço de casa, telefone de casa, nome do seu colégio, o nível em que você está participando (1, 2 ou 3) e a sua quantidade de acertos da 1ª fase.
- ✓ Use as folhas sem pauta para rascunho e para as soluções definitivas.
- ✓ Use uma folha para cada questão.
- ✓ Escreva no alto de cada folha seu nome e que questão está sendo resolvida.
- ✓ Escreva seu nome em todas as folhas que usar.
- ✓ Se para alguma questão você usar mais de uma folha, escreva na segunda folha seu nome e "continuação da questão ..."
- ✓ Ao entregar a prova, coloque todas as folhas que você tiver usado, inclusive os rascunhos, dentro da folha de papel almaço.
- ✓ Os rascunhos poderão ser consultados em caso de dúvida na hora da correção da sua prova.

PROBLEMA 1:

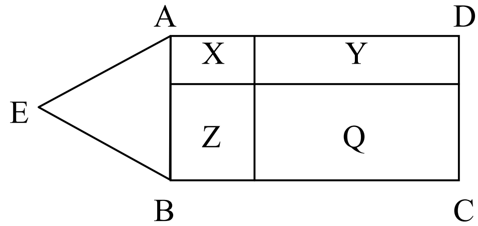
Diante da tumba de um rei antigo existia um enigma que somente os melhores calculistas da época poderiam descobrir. Esse enigma era a chave de acesso aos mais incríveis tesouros de seu reinado que ali estariam escondidos.
Ao tentar acessar o tesouro os exploradores se deparavam com a seguinte situação:
Existiam mais de mil pedras numeradas uma a uma sobre um altar e o explorador deveria retirar apenas uma e que fosse a correta, caso contrário uma maldição o condenaria à morte. A escolha estava baseada no enigma.
O enigma estava escrito em uma língua da época, mas os estudiosos conseguiram decifrá-lo no seguinte:
"O numeral X possui exatamente 60 divisores distintos, inteiros e positivos. Ele pode ser escrito de várias formas sendo que aqui se apresenta da seguinte maneira, $X = 4^2 \times 9 \times 5 \times 7^y$***. A pedra a ser escolhida é aquela que representa o maior divisor comum entre a soma e o produto dos divisores de X."***
Qual a pedra a ser escolhida para se ter acesso ao tesouro sem ser condenado à morte?

PROBLEMA 2:

No pátio da escola de Pedro resolveu-se separar os espaços de forma que cada aluno possa expor seus trabalhos de pintura em varais e que o público possa vê-los. A professora, com um pedaço de barbante, pediu para que os alunos Alovino, Benavino, Carolino e Dionino segurassem o barbante formando um retângulo (ABCD).
Após isso, a professora foi alertada pelos alunos que outro aluno, o Ecovino, ainda não tinha seu varal para apresentação. A professora tomou a seguinte decisão: cortou outro pedaço de barbante e pediu que Alovino e Benavino segurassem juntamente com Ecovino.

Ecovino percebeu posteriormente que a distância entre ele e os colegas Alovino e Benavino era a mesma e que também era igual à distância entre eles.
A professora percebeu que, para melhor utilizar o espaço selecionado era necessário subdividir o retângulo maior de acordo com a quantidade de trabalhos elaborados. Para isso, amarrou mais dois barbantes paralelos aos lados do retângulo maior formando quatro retângulos menores que chamou de X, Y, Z e Q cujos perímetros estão representados abaixo pelos numerais correspondentes. Responda ao que se pede:
X = 1m, Y = 2m, Z = 2m.

a) Qual o perímetro do retângulo Q?
b) É possível determinar o perímetro do pentágono EABCD? Como?



PROBLEMA 3:
Em um importante julgamento, Paulo, Mário e Jorge são acusados de cometerem um crime. Durante o julgamento, quando interrogados, cada um deles afirmou o seguinte sobre o ocorrido:
Paulo: eu e Mário somos inocentes.
Mário: Paulo é inocente e Jorge culpado.
Jorge: Eu sou inocente e Paulo é culpado.
Após o interrogatório o juiz chamou a testemunha principal do crime e ouviu, sobre o caso em questão, o seguinte relato:
Testemunha: Um dos acusados mentiu duas vezes, um deles falou a verdade duas vezes e o outro mentiu uma vez e disse a verdade na outra vez.
Baseado nisso o juiz, hábil em lógica, descobriu o culpado.
Diga, justificando o raciocínio lógico utilizado, o nome do criminoso.

PROBLEMA 4:
Escreva o número a seguir como uma fração de numerador e denominador inteiros.

$$\sqrt[3]{\frac{1\times 2\times 4+2\times 4\times 8+3\times 6\times 12+\cdots+1000\times 2000\times 4000}{1\times 3\times 9+2\times 6\times 18+3\times 9\times 27+\cdots+1000\times 3000\times 9000}}$$

PROBLEMA 5:
Seu Manoel é dono de uma adega e vende determinadas misturas de vinho. Ele dispõe em seu estoque de um vaso onde há 12 litros de vinho e 18 litros de água e de outro onde há 9 litros de vinho e 3 litros de água.
Um cliente fez um pedido especial e Seu Manoel se viu com o seguinte dilema: Quantos litros deveria tirar, de cada vaso, para obter uma mistura com 14 litros que contenham partes iguais de água e vinho?

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2002
2ª FASE – 31 de agosto de 2002

NÍVEL 2 – 7ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental

Instruções:

- ✓ A Prova é composta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- ✓ Todas as soluções devem ser justificadas.
- ✓ Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- ✓ A Prova tem a duração de 4 horas.
- ✓ Não é permitido o uso de calculadora.
- ✓ Você deve ter recebido uma folha de papel almaço pautado, estas folhas de instruções e questões, e folhas sem pauta. Na folha de papel almaço escreva apenas seu nome, endereço de casa, telefone de casa, nome do seu colégio, o nível em que você está participando (1, 2 ou 3) e a sua quantidade de acertos da 1ª fase.
- ✓ Use as folhas sem pauta para rascunho e para as soluções definitivas.
- ✓ Use uma folha para cada questão.
- ✓ Escreva no alto de cada folha seu nome e que questão está sendo resolvida.
- ✓ Escreva seu nome em todas as folhas que usar.
- ✓ Se para alguma questão você usar mais de uma folha, escreva na segunda folha seu nome e "continuação da questão ..."
- ✓ Ao entregar a prova, coloque todas as folhas que você tiver usado, inclusive os rascunhos, dentro da folha de papel almaço.
- ✓ Os rascunhos poderão ser consultados em caso de dúvida na hora da correção da sua prova.

PROBLEMA 1:

Duas formiguinhas, mãe e filha, passeiam de um ponto A até um ponto B sobre uma armação de arame em formato circular e de dimensões desprezíveis para análise. Existe uma outra armação similar, externa e concêntrica àquela primeira onde as formiguinhas caminhavam.

As duas travam o seguinte diálogo:

Filha: Mãe! Não seria melhor caminharmos até a outra armação, caminharmos por ela até um determinado ponto e depois voltarmos à armação em que estamos? O caminho não seria mais curto?

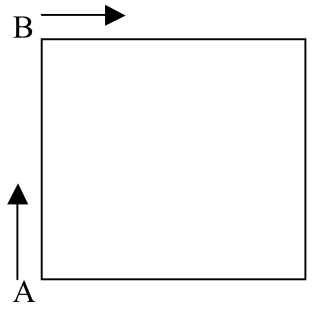
Mãe: Olha minha filha, isso está correto para alguns ângulos centrais, mas errado para outros.

Para qual intervalo de ângulos a proposta da filha é válida e para qual intervalo não serve?

Observação: A transferência entre as circunferências é feita de forma que o trajeto seja perpendicular a duas retas imaginárias que tangenciem externamente as duas circunferências.

PROBLEMA 2:

Dois corredores partem simultaneamente dos pontos A e B situados nos vértices de um quarteirão em forma de quadrado. Seguem percorrendo o perímetro do quarteirão no sentido das setas. O lado do quadrado é de 20m e a velocidade do corredor que partiu de B é igual a 80% da velocidade do corredor que partiu de A. A corrida termina no momento em que um dos corredores chega ao seu próprio ponto de partida.



a) No momento que a corrida termina, qual a distância entre os dois corredores?
b) Durante a corrida, qual foi a menor distância **(em linha reta)** entre os dois corredores?

PROBLEMA 3:

Considere a seqüência de números 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, ..., onde o primeiro termo é igual a 0, o segundo é igual a 1, o terceiro é igual a 1 e cada número a seguir é a soma dos três anteriores (por exemplo, o sexto termo é 7 = 4+2+1; o sétimo termo é 13 = 7+4+2; etc.).

a) Mostre que o 2001-ésimo elemento desta seqüência não é primo.
b) Mostre que o 2002-ésimo elemento desta seqüência não é primo.

Agora imagine que usamos a mesma regra mas podemos começar com outros três números naturais ao invés de 0, 1 e 1.

c) O sétimo termo pode ser 2002? Explique.
d) O décimo-quinto termo pode ser 2002? Por que?

PROBLEMA 4:

Seu Manoel é dono de uma adega e vende determinadas misturas de vinho. Ele dispõe em seu estoque de um vaso onde há 12 litros de vinho e 18 litros de água e de outro onde há 9 litros de vinho e 3 litros de água.

Um cliente fez um pedido especial e Seu Manoel se viu com o seguinte dilema: Quantos litros deveria tirar, de cada vaso, para obter uma mistura com 14 litros que contenham partes iguais de água e vinho?

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2002
2ª FASE – 31 de agosto de 2002

NÍVEL 3 – Ensino Médio

Instruções:

- ✓ A Prova é composta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
- ✓ Todas as soluções devem ser justificadas.
- ✓ Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá-las assim mesmo.
- ✓ A Prova tem a duração de 4 horas.
- ✓ Não é permitido o uso de calculadora.
- ✓ Você deve ter recebido uma folha de papel almaço pautado, estas folhas de instruções e questões, e folhas sem pauta. Na folha de papel almaço escreva apenas seu nome, endereço de casa, telefone de casa, nome do seu colégio, o nível em que você está participando (1, 2 ou 3) e a sua quantidade de acertos da 1ª fase.
- ✓ Use as folhas sem pauta para rascunho e para as soluções definitivas.
- ✓ Use uma folha para cada questão.
- ✓ Escreva no alto de cada folha seu nome e que questão está sendo resolvida.
- ✓ Escreva seu nome em todas as folhas que usar.
- ✓ Se para alguma questão você usar mais de uma folha, escreva na segunda folha seu nome e "continuação da questão ..."
- ✓ Ao entregar a prova, coloque todas as folhas que você tiver usado, inclusive os rascunhos, dentro da folha de papel almaço.
- ✓ Os rascunhos poderão ser consultados em caso de dúvida na hora da correção da sua prova.

PROBLEMA 1:

As camponesas de certa região têm uma superstição curiosa para determinar quando vão casar: A solteira segura em uma das mãos seis folhas longas de capim, pelo centro delas, de forma que as pontas fiquem de fora, acima e abaixo da mão. Uma amiga sua amarra as seis pontas de cima duas a duas, de maneira aleatória, e depois faz o mesmo com as pontas de baixo. Se as folhas de capim assim amarradas formarem um único anel, as camponesas crêem que a solteira se casará em menos de um ano. Determine a probabilidade de o anel ser formado.

PROBLEMA 2:

Prove que a equação $\log x - (2\log 5)\operatorname{sen} x = 0$ possui exatamente sete soluções reais distintas.

PROBLEMA 3:

Considere a seqüência de números 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, ..., onde o primeiro termo é igual a 0, o segundo é igual a 1, o terceiro é igual a 1 e cada número a seguir é a soma dos três anteriores (por exemplo, o sexto termo é 7 = 4+2+1; o sétimo termo é 13 = 7+4+2; etc.).

a) Mostre que o 2001-ésimo elemento desta seqüência não é primo.

b) Mostre que o 2002-ésimo elemento desta seqüência não é primo.

Agora imagine que usamos a mesma regra mas podemos começar com outros três números naturais ao invés de 0, 1 e 1.

c) O sétimo termo pode ser 2002? Explique.

d) O décimo-quinto termo pode ser 2002? Por que?

PROBLEMA 4:

Dado um triângulo ABC sejam A_1 o pé da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, A_2 e A_3 as projeções ortogonais de A_1 sobre $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente; B_1 o pé da altura relativa ao lado $\overline{AC}$, B_2 e B_3 as projeções ortogonais de B_1 sobre $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente; C_1 o pé da altura relativa ao lado $\overline{AB}$, C_2 e C_3 as projeções ortogonais de C_1 sobre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Prove que os pontos $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ pertencem a uma mesma circunferência.