OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2003

Nível 1 – (5ª e 6ª séries do ensino fundamental)

2ª Fase – Prova Final – 27 de setembro de 2003.

Folha de Questões

1) Um feirante tinha uma cesta de ovos para vender e atendeu sucessivamente três fregueses. Cada freguês levou a metade dos ovos existentes na cesta e mais meio ovo. Se o feirante não precisou quebrar nenhum ovo e sobraram 10 ovos na cesta, quantos ovos havia inicialmente?

2) Zé e seus amigos estavam disputando para saber quem era o melhor aluno de Matemática da Escola Trovador. A professora colocou um desafio que chamava-se "o labirinto matemático". A idéia era muito simples, bastava seguir o caminho correto até o outro lado do labirinto. Cada casa do labirinto podia ter 2, 3 ou 4 passagens para uma outra casa. Em cada casa a professora colocou um número. O segredo do caminho correto era alternar o próximo número entre múltiplos e divisores naturais começando pelo divisor do número que estava fora. Por exemplo, como o número do lado de fora é o 10 e a primeira casa será sempre um divisor, se as opções forem 2, 3 ou 5 ele só deveria entrar nas casas 2 ou 5 pois são os únicos divisores naturais de 10. A seguir, se ele escolhe a casa 2, somente poderá ir para casas que tenham números que são múltiplos de 2 e assim sucessivamente, alternando sempre entre múltiplos e divisores naturais até encontrar o caminho para o outro lado. Feito o caminho correto, após marcar todas as casas pela qual passou, a professora perguntou qual a soma dos valores das casas pelas quais o caminho de João foi traçado. Se ele acertou o desafio, qual foi essa soma?

10

10	12	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	12	12	4	10	10	10
7	4	3	5	8	17	9	17	8	12	11	8	7	7	6	8	4	24	5
15	1	7	7	3	12	8	5	10	5	3	3	7	5	6	5	3	6	7
5	8	0	14	2	4	2	3	7	5	17	19	27	3	3	7	11	30	13
7	13	11	27	5	9	0	13	26	11	9	3	6	7	0	12	19	2	7
3	10	15	17	19	94	63	59	1	7	1	5	2	8	8	7	3	6	9
9	11	22	4	4	4	3	8	19	17	5	7	7	7	5	8	0	4	3
2	4	6	7	0	12	13	19	12	13	9	19	18	9	9	10	5	7	2
3	0	0	3	9	18	9	27	3	17	15	7	9	7	5	2	0	1	0

C H E G A D A

3) Em um jogo de xadrez é comum os grandes mestres enxergarem muito antes das jogadas acontecerem. Isso ocorre pois eles possuem o hábito de ver com o cérebro. Eles imaginam os movimentos e por isso conseguem realizar essas jogadas.
   Essa capacidade de construir figuras mentalmente é conhecida como visão espacial e é fundamental para compreender certos problemas do cotidiano e olímpicos. Um bom exercício para desenvolver o raciocínio espacial é o problema a seguir. Mostre que você é capaz de resolvê-lo.
   “Aos vértices de um cubo são atribuídos os números de 1 a 8 de modo que o conjunto os conjuntos dos números correspondentes aos vértices das seis faces são: {1,2,3,7}; {1,2,4,5}; {1,4,7,8}; {2,3,5,6}; {3,6,7,8}; {4,5,6,8}. Qual o número do vértice que está mais longe do vértice de número 1?”

4) Embora existam diversos tipos de números em Matemática (reais, complexos, etc.), o nome "Teoria dos Números" é tradicionalmente reservado para o estudo dos Números Inteiros, isto é: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... (Existem autores que apresentam um conceito mais abrangente envolvendo outros conjuntos numéricos). Um conceito chave em Teoria dos Números é o conceito de divisibilidade. A teoria dos números pode nos apresentar infinitos problemas de nível olímpico. Mostre que você domina a teoria dos números e resolva o problema abaixo:
   “Determine o menor número natural (inteiro positivo) de quatro algarismos tal que o número de divisores inteiros e positivos do número é igual ao seu primeiro algarismo”.

5) Carlos possui várias cartas de Magic. Ao todo são 361 cartas que podem ser separadas em vários tipos (deck). As cartas são colocadas em caixas com a mesma quantidade (As quantidades de cartas por caixas são sempre maiores que 1) e nessas caixas Carlos só coloca cartas de um mesmo deck. As cartas Legião são mais que 21% do total das cartas; as Odisséia representam mais que 15% do total; as do tipo Investida representam mais de 26% do total e as do tipo Flagelos representam mais de 36% do total. Carlos pode possuir cartas do tipo Chevalier?

6) Na sapataria do professor Fred os sapatos são guardados em caixas com medidas 3 x 5 x 7. Ele possui um depósito para guardar essas caixas e precisa saber o máximo de caixas de sapato que cabem dentro desse depósito que mede 11 x 35 x 39. Para o número encontrado, indique como colocar essa quantidade de caixas dentro do depósito (faça o desenho ou escreva descrevendo a arrumação).OBS: As caixas de sapato e o depósito possuem a mesma unidade de medida.

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2003

<u>Nível 2 – (7ª e 8ª séries do ensino fundamental)</u>

2ª Fase – Prova Final – 27 de setembro de 2003.

<u>Folha de Questões</u>

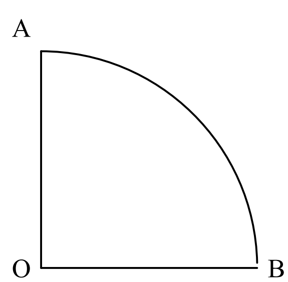
1) Resolva as questões a seguir:

   a) Determine o menor número inteiro positivo de quatro algarismos tal que o número de divisores inteiros e positivos do número é igual ao seu primeiro algarismo.

   b) Determine o menor número inteiro positivo e composto de quatro algarismos tal que o número de divisores inteiros e positivos do número é igual ao seu primeiro algarismo.

2) O Professor Fred quer fazer o seguinte jogo com seus alunos. Inicialmente ele escreve no quadro os números 2, 10, 25, 30, 49, 51. Em cada rodada do Jogo, o professor Fred escolhe um aluno que vai ao quadro, apaga dois números que já estão escritos e no seu lugar escreve o M.M.C. e o M.D.C. desses números escolhidos. É possível que, após algumas rodadas, os números sejam 8, 15, 34, 25, 3, 5? Justifique sua resposta.

3) A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1. No arco AB consideramos dois pontos P e Q de forma tal que a reta PQ é paralela a reta AB. Se X e Y são os pontos de interseção da reta PQ com as retas AO e OB respectivamente. Calcular $PX^2 + PY^2$.



4) Briot (matemático inglês-1817/1882) e Ruffini (matemático italiano-1765/1822) desenvolverem métodos para achar soluções para as equações chamadas recíprocas. Para melhor entender, veja a definição:

Seja a **equação racional inteira** $\mathbf{a_0.x^{n} + a_1.x^{n-1} + a_2.x^{n-2} + \ldots + a_n = 0}$, ordenada segundo as potências decrescentes de x, com a_0, a_1, ... , a_n números reais sendo $a_0 \neq 0$ e n inteiro positivo.

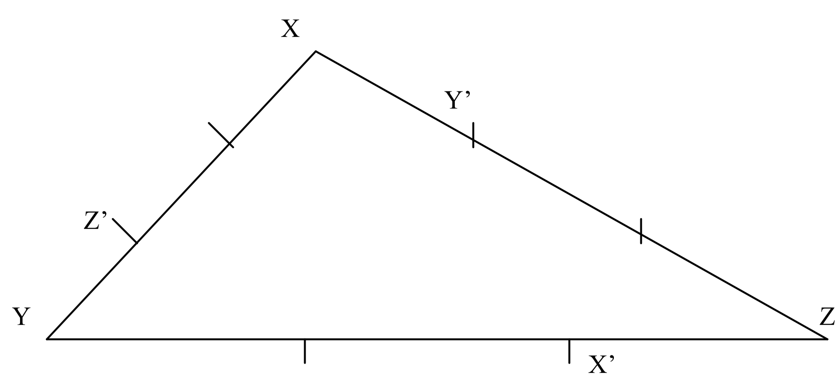
Diz-se que esta equação é **recíproca** se e somente se os termos eqüidistantes dos extremos forem iguais ou simétricos (opostos). Sendo iguais, teremos uma equação recíproca de 1ª espécie e, sendo simétricos (opostos), teremos uma equação recíproca de 2ª espécie.

a) Se $y = x + \frac{1}{x}$ calcule, em função de y, as expressões $x^2 + \frac{1}{x^2}$ e $x^3 + \frac{1}{x^3}$

b) Determine todas as raízes reais da equação abaixo: $x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

c) Determine todas as raízes reais de $x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$

5) Dado um triângulo XYZ, denomina-se "filho" de *XYZ* o triângulo *X'Y'Z'* tal que *X'* Pertence à *YZ*, *Y'* pertence *XZ*, *Z'* pertence à *XY* e *XZ'* = 2*YZ'*; *ZY'* = 2*XY'* e *YX'* = 2*ZX'*. Dado um triângulo *ABC* qualquer seja, $A_1B_1C_1$*. o seu filho, seja* $A_2B_2C_2$ o filho de $A_1B_1C_1$, e, mais geralmente, seja $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ o filho de $A_nB_nC_n$. Prove que o baricentro do triângulo *ABC* pertence ao interior de $A_nB_nC_n$ para todo *n* inteiro positivo.



OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2003

Nível 3 – (1^a e 2^a séries do ensino médio)

2^a Fase – Prova Final – 27 de setembro de 2003.

Folha de Questões

1) As funções

$$\text{arcsen}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \text{arccos}: [-1, 1] \to [0, \pi]$$

são definidas como as funções inversas, respectivamente, das funções

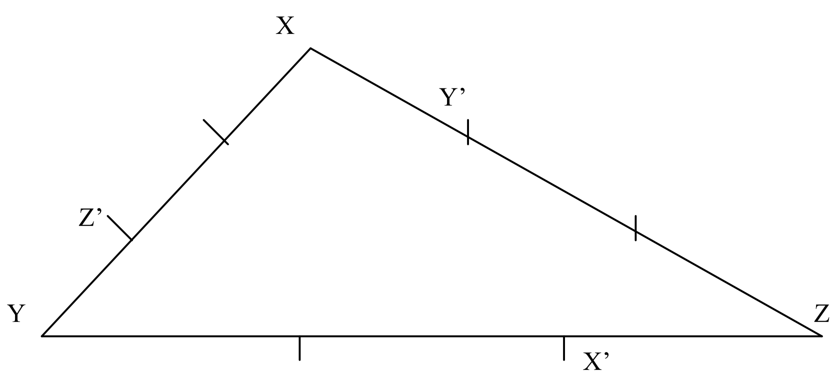
$$\text{sen}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \quad \text{e} \quad \cos: [0, \pi] \to [-1, 1].$$

a) Verifique que, para todo $x \in [-1,1]$ temos $(\text{arcsen}\, x) + (\text{arccos}\, x) = \frac{\pi}{2}$.

b) Determine os valores máximo e mínimo da função $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (\text{arcsen } x)^3 + (\text{arccos } x)^3.$$

2) Dado um triângulo XYZ, denomina-se "filho" de XYZ o triângulo $X'Y'Z'$ tal que X' Pertence à YZ, Y' pertence XZ, Z' pertence à XY e $XZ' = 2YZ'$; $ZY' = 2XY'$ e $YX' = 2ZX'$. Dado um triângulo ABC qualquer seja, $A_1B_1C_1$. *o seu filho, seja* $A_2B_2C_2$ o filho de $A_1B_1C_1$, e, mais geralmente, seja $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ o filho de $A_nB_nC_n$. Prove que o baricentro do triângulo ABC pertence ao interior de $A_nB_nC_n$ para todo n inteiro positivo.



3) Encontre todos os números naturais primos N de 4 algarismos que satisfaçam simultaneamente as três condições abaixo.
   I. $N < 6000$;
   II. Ao dividirmos N por 100 o resto é um número de um algarismo;
   III. Se invertermos a ordem dos algarismos de N obtemos um número N_1 tal que $N_1 - N = 999$.

4) Como explicou o Professor Carlos Frederico “Fred” Palmeira em um importante programa esportivo da TV brasileira, o goleiro de futebol pode conseguir uma vantagem significativa adiantando-se alguns passos na hora da cobrança do pênalti. Apesar de que as regras do jogo não permitem essa atitude, é comum que os juízes sejam tolerantes em relação a ela.

Suponha que em uma cobrança de pênalti a probabilidade de o goleiro permanecer na linha do gol seja $\frac{1}{8}$, e a probabilidade de ele avançar k passos seja igual a $\frac{1}{2^k}$, para k = 1, 2 ou 3 (nenhum goleiro avança mais de 3 passos) e que, neste caso, a probabilidade de o cobrador fazer o gol seja de $\frac{(25-k^2)}{30}$ (se o goleiro não avançar a probabilidade de fazer o gol seria $\frac{25}{30}$) . Suponha também que, caso o cobrador não consiga fazer o gol, a probabilidade de o juiz mandar repetir a cobrança seja $\frac{k}{5}$, onde k é o número de passos avançados pelo goleiro. Finalmente, considere que se o juiz mandar repetir 2 vezes, o goleiro desiste de tentar avançar.

Determine a probabilidade de o cobrador fazer o gol em uma determinada cobrança de pênalti.

5) a) Mostre que $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen} x - 4(\operatorname{sen} x)^3$

b) Calcule $96\left(\operatorname{sen} 10^\circ\right)^5 + 16\left(\operatorname{sen} 10^\circ\right)^4 - 52\operatorname{sen} 10^\circ + 10$.